SESSION DE 1980

MATHÉMATIQUES

Options T et TA

Épreuve n° 1 (exercices)

DURÉE : 4 heures

PREMIER EXERCICE

(Les deux questions sont indépendantes)

1° On considère la série numérique de terme général : $u_n = \dfrac{\cos nx}{2^n}$.

On désigne par S_n la somme partielle d'ordre n.

Montrer que la série est convergente.

Déterminer sa somme en utilisant une expression de S_n.

2° Pour tout entier $n \geqslant 0$ on considère la fonction $f_n : x \longmapsto x \,.\, \sin x \,.\, e^{-nx}$.

Pour quelles valeurs de n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} f_n(x)\, dx$ est-elle convergente?

Calculer I_n et étudier la convergence de la série de terme général I_n.

DEUXIÈME EXERCICE

1° k et a étant des réels, intégrer l'équation différentielle : $(x - a)\, y' - ky = 0$.

2° Soit E l'espace vectoriel des polynômes d'une indéterminée à coefficients réels.

Pour $P \in E$ on définit le polynôme Q par : $Q(X) = (X - a)\, P'(X)$.

Tournez la page S. V. P.

Montrer que l'application $u : P \longmapsto u(P) = Q$ est un endomorphisme de E.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

3° Quels sont les polynômes de E qui sont divisibles par leur dérivée?

TROISIÈME EXERCICE

E étant un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe C d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.

1° Construire C.

Indiquer les coordonnées cartésiennes des points de C où la tangente est parallèle soit à $\vec{i}$ soit à $\vec{j}$.

2° Calculer la longueur de la courbe C.

3° Calculer l'aire du domaine D limité par C.

4° Déterminer le centre d'inertie d'une plaque homogène coïncidant avec le domaine D.

5° Déterminer le centre de courbure à C au point de coordonnées polaires $\theta = 0$, $\rho = 2$.

QUATRIÈME EXERCICE

1° Intégrer l'équation différentielle (1) : $(x^2 - y^2)\, y' = 2\, xy$.

2° Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, indiquer la nature géométrique des courbes intégrales de l'équation (1).

3° On appelle C la courbe intégrale passant par le point de coordonnées $x = 1$, $y = 1$.

Déterminer le réel $b \in [0, 1]$ de façon à ce que la plus petite des deux aires des domaines limités par C et la droite d'équation $y = b$ soit égale à 1.

On donnera de b une valeur approchée à 10^{-2} près.

.../...

ENSAM 1980

-86-

CINQUIÈME EXERCICE

L'espace affine euclidien de dimension 3 étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la courbe E d'équations :

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \text{ où } p \text{ est un réel } > 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

1° Déterminer l'équation de la surface de révolution R engendrée par rotation de E autour de l'axe Oz.

2° a et b étant 2 réels tels que $0 < a < b$, les plans P_a et P_b d'équations respectives $z - a = 0$ et $z - b = 0$ coupent R suivant deux cercles.

Déterminer l'équation de la sphère S contenant ces deux cercles.

3° Calculer le volume du domaine limité par la sphère S et les deux plans P_a et P_b.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail